Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Esonero di Analisi Matematica II (primi 5 crediti) dell'10–11–07

Ingegneria Elettronica A.A.2007/2008, Soluzioni

Problema 1

Domanda 1 Il calcolo del zolume nei vari problemi si poteva scrivere come

$$\int\int_{x^2+y^2\leq a^2} dxdy \int_{a-\sqrt{x^2+y^2}}^{a} dz = \int\int_{x^2+y^2\leq a^2} dxdy\sqrt{x^2+y^2} =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} d\theta a^2\rho^2 = \frac{2\pi a^3}{3}$$

Domanda 2 Parametrizziamo il cono usando coordinate cartesiane $x = u$, $y = v$, $z = a - \sqrt{u^2+v^2}$ e la normale esterna è quindi $\underline{n}^e = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{j} + \underline{k}$ e l'integrale da calcolare è

$$\int\int_{u^2+v^2\leq a^2} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e)d\sigma = \int\int_{\substack{u^2+v^2\leq a^2\\ z=a-\sqrt{u^2+v^2}}} (z-a)dudv = \int\int_{u^2+v^2\leq a^2} (a-\sqrt{u^2+v^2}-a)dudv =$$

$$-\frac{2\pi a^3}{3}$$

Domanda 3 Eseguiamo il calcolo del flusso direttamente senza passare attraverso il teorema della divergenza. La superficie che racchiude il volume è data dal cono, dalla porzione di cilindro e dal cerchio $x^2+y^2 \leq a^2$ e $z = a$.

Cominciamo a calcolare il flusso attraverso la porzione di cilindro. La parametrizzazione del cilindro è la solita $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $z = u$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq 2$. La normale esterna al cilindro come noto è $\underline{n}^e_{cil} = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j}$ ed il prodotto scalare è fra i due vattori (il primo è il flusso calcolato sul cilindro) $(-\sin t, \cos t, u-a)$ e $(\cos t, \sin t, 0)$ è zero per cui l'integrale del flusso attraverso il cilindro è zero.

L'integrale attraverso la porzione di cono è pari al calcolo precedente *cambiato di segno* in quanto la normale esterna stavolta punta verso l'interno del cono.

L'ultimo integrale è il flusso attraverso la porzione interessata del piano $z = a$. La normale al piano è $(0,0,1)$ e quindi $\int\int_{\substack{u^2+v^2\leq a^2\\ z=a}} (z-a)dudz = 0$. Il risultato alla fine è $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Problema 2 La densità è $\delta(x,y,z) = a|x|+b|y|+cz$ con a, b, c a seconda dei vari casi. L'integrale è $\int_0^{4\pi} \sqrt{2}(a|\cos t|+b|\sin t|+ct)dt = 8c\sqrt{2}\pi^2+8\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}(a\cos t+b\sin t)dt = 8\sqrt{2}c\pi^2+8\sqrt{2}(a+b)$. Era sbagliato (a causa della variabile z) scrivere l'integrale come due volte l'integrale fra 0 e 2π. Ricordando inoltre il grafico delle funzioni $|\cos t|$ e $|\sin t|$, l'integrale della parte trigonometrica era 8 volte l'integrale fra 0 e $\pi/2$.

Problema 3 A, B, C. Il campo vettoriale è $\underline{F}(\underline{x}) = ax\underline{i}+by\underline{j}+z\underline{k}$ e il vettore ortogonale alla superficie è (tralasciando la direzione) $\underline{v}^e = -\cos\theta\underline{i}-\sin\theta\underline{j}+(-\sin t\cos\theta+\sin\theta\cos t)\underline{k}$. Il prodotto scalare $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^e) = -a\cos\theta\cos t - a\cos^2\theta - b\sin\theta\sin t - b\sin^2\theta - \sin t\cos\theta + \cos t\sin\theta)$. Tenendo presente che l'integrale va fatto fra 0 e 2π (4π prima che dicessi di correggere), sopravvivono solo i termini $\int_0^{\pi/2} dt\int_0^{2\pi} d\theta(-a\cos^2\theta - b\sin^2\theta) = -\frac{\pi^2}{2}(a+b)$

Nel caso D il risultato è lo stesso (ovviamente sostituendo ad a e b i giusti valori).

Problema 4 La forma differenziale è data da $\omega = d(x^2z)+d(x^2y^2)+z(1-2x)dx$. Le varie curve sono date da $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 4\pi$. Il punto iniziale delle varie curve è $(a,0,0)$ e $(a,0,4\pi)$. $\oint_\gamma d(x^2z)+d(x^2y^2) = 4a^2\pi$; $\oint_\gamma z(1-2x)dx = -a\int_0^{4\pi} t\sin t(1-2a\cos t)dt =$. Quindi il risultato è dato da $2\pi a(a+2)$.

Problema 5 La curva è dato da $x = a\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$, $x = a\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $z = t$ e quindi si ha

$\oint_\gamma d(x^2z) = 4\pi(a+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$, $\oint_\gamma d(x^2y^2) = 0$, $\oint_\gamma z(1-2x)dx = \int_0^{4\pi} t(1 - 2a\cos t - \sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}\sin t)(-a\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)dt = \pi(4a + 2\sqrt{2} - 2a^2 - 2a\sqrt{2})$. Sommando il risultato è $\pi(2\sqrt{2} + 2a^2 + 2 + 2a\sqrt{2} + 4a)$ e nei quattro casi si ha: A $8\pi + 4\pi\sqrt{2}$, B $18\pi + 6\pi\sqrt{2}$, C $\frac{9}{2}\pi + 3\pi\sqrt{2}$, D $32\pi + 8\pi\sqrt{2}$,

Gli integrali che entrano nel calcolo sono $\int_0^{4\pi} t\cos t dt = 0$, $\int_0^{4\pi} t\cos(2t)dt = 0$, $\int_0^{4\pi} t\sin t dt = -4\pi$, $\int_0^{4\pi} t\cos^2 t dt = 4\pi^2$, $\int_0^{4\pi} t\sin^2 t dt = 4\pi^2$, $\int_0^{4\pi} t\sin t\cos t dt = -\pi$,